ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Un problema primitivo: l'area — una lezione con Luigi

Con questo fascicolo cominciamo ad affrontare uno degli argomenti più importanti tra quelli trattati al liceo; parte la nostra avventura nel mondo degli integrali. Prima di iniziare ti ricordo, se ancora non l'hai fatto, di munirti di tutti i preliminari necessari andando a riguardare i fascicoli su funzioni, limiti e derivate.

Ci sono diversi modi di definire cosa sia un integrale; ciascuno ne mette in luce un aspetto differente. Noi scegliamo di partire da un problema concreto.

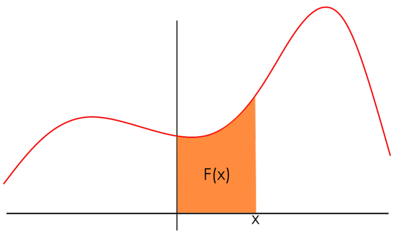
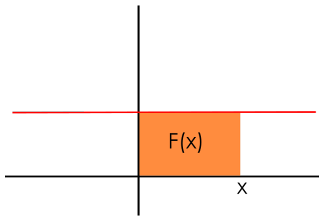


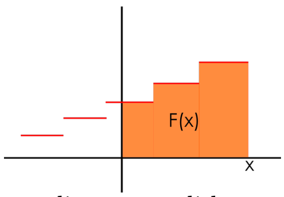
Figura 1: Grafico di $f(x)$ (in rosso), e della funzione F

Prendiamo una funzione f reale di variabile reale; la sceglia-mo continua e positiva (cioè, che assuma sempre valori maggiori di 0). Guardiamo al suo grafico partendo da 0 in avanti. La domanda che ci poniamo è: esiste un modo di calcolare l'area sottesa al grafico (cioè, la porzione di piano tra il grafico e l'asse delle x)?

Certo, con questa generalità tutto quello che viene da rispondere a questa domanda è un sonoro "BOH" accompagnato da un'eloquente scrollata di spalle. Tuttavia, cerchiamo di non disperare e partire da alcune semplici osservazioni.

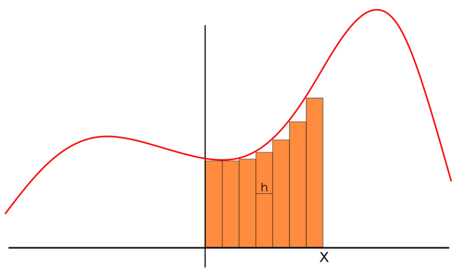
Chiamiamo con F la funzione che ad ogni x associa l'area sottesa ad f tra 0 e x stesso; un disegno di sicuro ti chiarirà le idee. Il problema di calcolare l'area diventa il problema di trovare F. Sì, abbiamo decisamente poche informazioni su come si comporti questa funzione, ma il disegno ci dà qualche suggerimento: in qualche modo, la funzione f determina il *tasso di variazione* di F al variare di x (vi viene in mente qualche concetto già noto?).





Certo, se f non fosse una funzione qualunque ma avesse una forma particolarmente semplice potremmo dire qualcosa di quest'area. Se, ad esempio, la funzione fosse costante, l'area che stiamo cercando di calcolare sarebbe quella di un rettangolo: la nota formula base per altezza ci darebbe il risultato che cerchiamo. Stessa cosa se la funzione fosse *a gradini*: in questo caso il valore che cerchiamo sarebbe la somma di tanti rettangoli, ognuno di base e altezza nota.

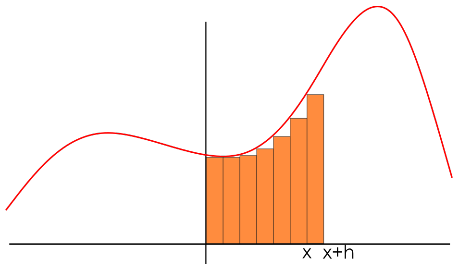
Bene, ma come ci aiutano queste osservazioni sui rettangoli con il nostro problema generale? Beh, proviamo insieme a immaginarci una piccola costruzione. Fissiamo una certa x e dividiamo l'intervallo $[0, x]$ in tanti segmentini di uguale lunghezza che chiamiamo h. Il nostro obiettivo è ricondurci al caso precedente: partendo dal nostro grafico, vogliamo creare una funzione a gradini la cui area sottesa sia "abbastanza vicina" a quella precedente. Le basi di tutti i rettangolini le abbiamo già e sono tutte lunghe h, ma cosa scegliere come altezza?



Usiamo qui l'unica proprietà che abbiamo supposto per la nostra funzione f, assieme a un risultato che Michele vi ha raccontato nel fascicolo sulle derivate: il teorema di Weierstrass. Il

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

teorema ci dice che una funzione continua in un intervallo assume tutti i valori compresi tra i due estremi. Per ogni intervallino possiamo dunque scegliere il valore medio tra i quelli che la funzione assume agli estremi del segmentino (per semplicità, più avanti chiameremo $\bar{x}$ il punto in cui f assume quello specifico valore).



Abbiamo così costruito la nostra funzione a gradini fatta di tanti rettangoli; più avanti questo procedimento verrà formalizzato, ma un po' di intuizione può indurti a pensare che al tendere di h a 0 l'area della funzione a gradini diventi proprio l'area che stiamo cercando.

Un ultimo sforzo, partendo dalla nostra osservazione iniziale. Proviamo a calcolare il rapporto incrementale della nostra funzione (quel "tasso di variazione di cui parlavamo all'inizio"). Fissato un valore h positivo, sufficientemente piccolo, proviamo a stimare $F(x+h) - F(x)$.

Ricorrendo alla nostra costruzione non c'è niente di più semplice: $F(x+h)-F(x)$ altro non è che l'area dell'ultimo rettangolino, quello più a destra. Allo stesso modo, il rapporto incrementale $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ sarà dunque nient'altro che $f(\bar{x})$.

Con questo procedimento grossolano abbiamo scoperto una cosa molto importante: la funzione F che stiamo cercando, la soluzione del nostro problema, è quella funzione la cui derivata è f. Ad essa viene dato il nome di *funzione integrale* e viene indicata più propriamente in questo modo

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

In questo modo abbiamo evidenziato la doppia natura dell'integrale: da un lato ha a che fare con il concetto di "area" (o, più in generale, di misura di insiemi); dall'altro, riguarda un processo in qualche modo inverso a quello di derivazione. Del primo punto ti parlerà più ampiamente Thomas nel prossimo fascicolo; noi invece ci concentriamo sul secondo.

Primitive e integrali indefiniti

Definizione

Data una funzione f reale di variabile reale, chiamiamo **primitiva** di f una funzione F derivabile e tale che per ogni x nel dominio di f valga $F'(x) = f(x)$ (cioè, in ogni punto f è la derivata di F). Inoltre, chiameremo **integrabile** una funzione che ammette una primitiva.

Notiamo subito una cosa: **una funzione può ammettere più primitive**. Prendiamo come esempio la funzione costante $f = 1$ (cioè, quella che a qualsiasi valore x associa 1). Usando le tue conoscenze riguardo le derivate, saprai di certo che la funzione lineare $g(x) = x$ ha come derivata proprio la funzione costante 1. Tuttavia, anche la funzione $h(x) = x + 1$ ha come derivata la stessa funzione f. In effetti, ricordando che la derivata di una costante è pari a 0, una qualunque funzione del tipo $x + c$, dove c è un qualsiasi numero reale, ha come derivata la nostra f. Con questo semplice ragionamento ti sarai forse convinto del seguente

Teorema

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora le funzioni del tipo $F(x)+c$, dove c è un qualunque numero naturale, sono **tutte** e **sole** le primitive di f.

Assieme alla parola primitiva useremo d'ora in poi anche un altro termine ad essa collegato, che definiamo qui di seguito.

Definizione

Chiamiamo **integrale indefinito di** f l'insieme di tutte le sue primitive $F + c$, con c numero reale . Lo indicheremo in questo modo:

$$\int f(x)dx := F + c.$$

Per il resto di questo fascicolo ci dedicheremo al problema della ricerca di primitive o, equivalentemente, al calcolo di integrali indefiniti. A un occhio poco attento questa potrebbe sembrare una questione banale: se abbiamo detto che l'integrale è l'inverso della derivazione, allora basta tenere sottomano una qualsiasi tabella che riassuma le principali regole di derivazione e leggerla al contrario; così, data una qualsiasi funzione riuscirò subito a trovare la sua derivata!
Beh, *sì e no*.

L'arte di integrare

Nella comunità matematica è tipico utilizzare l'espressione: *"derivare è un lavoro banale, integrare è un'arte"*. Questo perché se pure immediatamente è possibile risalire a delle regole base per funzioni elementari, in generale quando ci si trova davanti a una funzione bisogna "farsi furbi", escogitare delle tecniche con cui è possibile calcolare l'integrale. Prima però, un esempio facile.

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = x$. Sappiamo che dato un monomio, la sua derivata è un monomio di un solo grado inferiore a quello di partenza. In pratica, la derivata di x^2 è $2x$. Siccome però cerchiamo una funzione la cui derivata sia solo x, proviamo a dividere tutto per 2: facendo i calcoli (che ti invito caldamente a fare!) scopriamo che se definiamo $F(x) := \frac{x^2}{2}$, allora F è una primitiva di f.

Similmente, se cerchiamo la primitiva di $\cos(x)$, ci accorgiamo subito che sarà della forma $\sin(x) + c$. In sostanza, "leggendo al contrario" le regole di derivazione per polinomi, logaritmi, esponenziali e funzioni armoniche ottieni delle regole di integrazione. Ti invito qui a munirti di una tabella che riassuma le principali regole di derivazione/integrazione per funzioni elementari; diventerà la tua migliore amica nelle ore di matematica a seguire. Tabella alla mano, prova ad allenarti risolvendo il seguente

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Esercizio

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

$$\int \frac{7}{6}\sqrt[6]{x}dx \qquad \int e^{x+2}dx$$
$$\int 4x^5dx \qquad \int cos(x)dx$$

Ma cosa accade appena complichiamo un po' le cose, se ad esempio cerchiamo la primitiva di $f(x) := x^2 + \cos(x)$? Ci viene in aiuto una proprietà molto importante degli integrali, che rende le cose abbastanza facili.

Teorema

L'integrale indefinito è un **operatore lineare**. Cioé -

- l'integrale indefinito di una somma di funzioni è uguale alla somma degli integrali indefiniti delle singole funzioni; scriveremo che
$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$
Possiamo anche leggere l'equazione come "l'integrale si spezza sulle somme".
- l'integrale indefinito di una funzione moltiplicato per una costante è la costante stessa moltiplicato per l'integrale indefinito; scriveremo
$$\int c \cdot f(x)dx = c\int f(x)dx,$$
dove c indica un qualunque numero reale fissato. Possiamo anche leggere questa equazione come "l'integrale porta fuori i numeri".

In sostanza, quello che ci dice questo teorema è: se noi abbiamo una lunga sequenza di funzioni (eventualmente moltiplicate per una costante) di cui conosciamo singolarmente l'integrale, sappiamo automaticamente calcolare anche l'integrale complessivo!

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = 3x^2+4\cos(x)+1$; le regole di derivazione che conosciamo sui polinomi e sulle funzioni armoniche ci consentono di risalire alle primitive dei nostri tre fattori presi singolarmente. Grazie al teorema enunciato sopra, l'integrale indefinito della loro somma (dunque, di f) non è altro che la somma di queste primitive:
$F(x) = x^3 + 4\sin(x) + x + c$, con c un qualunque numero reale.

Se hai capito, ti risulterà più o meno facile risolvere i seguenti esercizi.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Esercizio

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

$$\int [cos(x) - sin(x)]dx \qquad \int [x^3 + (x-1)^2]dx$$
$$\int \frac{(x+1)(x+3)}{x}dx \qquad \int [3e^x + tan(x) + 5]dx$$

La tabella di derivazione/integrazione ci aiuta in realtà a risolvere anche problemi apparentemente più complessi, sfruttando le regole di derivazione per funzioni composte. Come sempre, partiamo da un

Esempio

Vogliamo provare a calcolare $\int 2x \cdot (x^2+1)^3 dx$. Questo è un integrale certamente più complesso dei precedenti, ma proviamo a fare qualche osservazione. Se definiamo $f(x) := x^2+1$, ci accorgiamo che $f'(x) = 2x$, proprio una delle funzioni che compare sotto il segno d'integrazione. Possiamo riscrivere il nostro integrale nella forma $\int (f(x))^3 \cdot f'(x)dx$. Dalle regole di integrazione delle funzioni composte sappiamo che se poniamo $F(x) := \frac{(x^2+1)^4}{4}$, allora $F'(x) = 2x(x^2+1)^3$. Possiamo dunque scrivere $\int 2x \cdot (x^2+1)^3 dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$, con c un qualunque numero reale.

Nel linguaggio formale matematico, lo scriviamo così:

Teorema

$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)dx = g(f(x)) + c.$$

Dimostrazione. Infatti $[g(f(x))]' = g'(f(x))f(x)$, e dunque $\int [g(f(x))]'dx = \int g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x)) + c.$ □

Starai forse adesso cominciando ad intuire perché è vero quello che si dice, che integrare è un'arte. Davanti a un integrale generico la difficoltà è avere la capacità di saper riconoscere, nel groviglio di funzioni che ti ritrovi davanti, una forma che ti consenta di applicare una delle regole che trovi in queste pagine. Per allenare l'intuito, ecco a te

Esercizio

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

$$\int \frac{4x}{2x^2+3}dx \qquad \int \frac{\cos(x)}{3\sin(x)+2}dx \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx \qquad \int \cos(3x)dx$$
$$\int 4(4x+1)^2 dx \qquad \int \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx \qquad \int 4xe^{2x^2}dx$$

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Integrazione per parti

Un'altra forma di integrazione è l'integrazione per parti, che è un modo di risolvere un integrale quando come integranda abbiamo il prodotto di due funzioni note. Il risultato segue in modo abbastanza immediato da una delle regole di derivazione, a volte conosciuta come *regola di Leibniz*, che riassumeremo ricorrendo alle formule. Date due funzioni f e g, la derivata del loro prodotto si calcola così: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Proviamo adesso a integrare da entrambi i lati: $f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$. Possiamo girare l'equazione per ottenere il seguente

Teorema

$$\int [f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Cosa significa? Proviamo a capirlo con un esempio.

Esempio

Cerchiamo di calcolare il seguente integrale indefinito: $\int xcos(x)dx$. Possiamo pensare l'integranda come prodotto di due funzioni distinte: x e $cos(x)$, entrambe funzioni che sappiamo sia integrare che derivare. Proviamo a scegliere la funzione x come nostra f e $cos(x)$ come nostra g' e applichiamo la formula:

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c,$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato il fatto che $-\sin(x)$ è la derivata di $\cos(x)$. In questo modo, siamo riusciti a risolvere agilmente un integrale che altrimenti non avremmo saputo affrontare. Ma cosa sarebbe successo se avessimo applicato la stessa formula scegliendo come f la funzione $\cos(x)$ e come g' la funzione x? Avremmo:

$$\int x\cos(x)dx = \frac{x^2}{2}\cos(x) + \int \frac{x^2}{2}\sin(x)dx = \dots$$

(ti invito a continuare con i cacoli, se riesci!)

Questo esempio, oltre ad illustrare come può essere usata la formula dell'integrazione per parti, mette in luce anche un altro aspetto importante: la scelte delle due funzioni da integrare e derivare deve essere fatta in modo intelligente. Molto spesso, scegliendo la f e la g' in un certo modo sarà possibile arrivare agevolmente alla soluzione; se non si presta attenzione però, si potrebbe finire a complicarsi la vita in una successione di calcoli senza fine. D'altronde è sbagliando che si impara; per affinare l'intuito, eccoti dunque una serie di opportunità per collezionare errori.

Esercizio

Calcola i seguenti integrali indefiniti.

$$\int x\ln(x)dx \qquad \int xe^x dx$$

$$\int \ln^2(x)dx \qquad \int x^2e^x dx$$