ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Soluzioni degli esercizi elementari

Soluzione dell'esercizio 1.

1. Partiamo osservando che la funzione non è altro che una retta orizzontale parecchio in alto; quindi, per come abbiamo definito la derivata in un punto, ci aspettiamo che "la tangente in ogni suo punto sia la retta stessa", ovvero che $f'(x) = m = 0 \ \forall x$. E in effetti, chiamando k il valore orrendo della f:

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{k}-\cancel{k}}{h} \;=\; 0,$$

valido $\forall k \in \mathbb{R}$ e $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Trattandosi anche questa di una retta, seppur obliqua, ci aspettiamo che anche stavolta sia "tangente di se stessa" in ogni punto, e quindi che $f'(x) = m = 11 \ \forall x$. Infatti:

$$\begin{aligned} f'(-2) \;&=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{11\,(-2+h)-11(-2)}{h} \\ &=\; \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{22}+11h+\cancel{22}}{h} \\ &=\; \lim_{h\to 0} \frac{11\,\cancel{h}}{\cancel{h}} \;=\; 11, \end{aligned}$$

valido indipendentemente da x_0.

3. Calcoliamo la derivata di f in $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) \;&=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+1-(2^2+1)}{h} \\ &=\; \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4}+4h+h^2+\cancel{1}-\cancel{4}-\cancel{1}}{h} \\ &=\; \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,(4+h)}{\cancel{h}} \;=\; 4. \end{aligned}$$

Analogamente, la derivata di f in $x_0 = 5$ vale 10. Osserviamo che il grado del polinomio è 2 e la derivata in entrambi i punti vale $2x_0$.

4. Calcoliamo la derivata di f in $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} f'(-1) \;&=\; \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^3-3-\left((-1)^3-3\right)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{1}+3h-3h^2+h^3-\cancel{3}+\cancel{1}+\cancel{3}}{h} \\ &=\; \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left(3-3h+h^2\right)}{\cancel{h}} \;=\; 3. \end{aligned}$$

Analogamente, la derivata di f in $x_0 = 4$ vale 48. Osserviamo che il grado del polinomio è 3 e la derivata in entrambi i punti vale $3x_0^2$.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

5. Calcoliamo la derivata di f in $x_0 = 2$:

$$
\begin{aligned}
f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 1000000 - (2^2 + 1000000)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 + \cancel{1000000} - \cancel{4} - \cancel{1000000}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,(4+h)}{\cancel{h}} = 4.
\end{aligned}
$$

Analogamente, la derivata di f in $x_0 = 5$ vale 10. Osserviamo che, come accadeva nel terzo esercizio, il termine noto è ininfluente, e i risultati sono esattamente gli stessi. Proprio quanto ci potevamo aspettare: il grafico di questa funzione è identico a quello del terzo esercizio a meno di una traslazione molto in alto, per cui è chiaro che le rette tangenti nei punti corrispondenti avranno lo stesso coefficiente angolare. Prova a vederlo con un disegno (magari con 10 al posto di 1000000!).

6. Calcoliamo la derivata di f in $x_0 = 1$:

$$
f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{1/2} - 1}{h} = \frac{1}{2}
$$

dove abbiamo applicato il terzo limite notevole nella tabella riportata nella lezione precedente con $k = \frac{1}{2}$. Il caso $x_0 = 0$ è più delicato: provando a fare il limite, ti sarai accorto del fatto che sia necessario imporre $h \geq 0$. In effetti, la funzione data non ammette derivata nell'origine proprio per questo motivo. Approfondiremo questo dettaglio per nulla trascurabile nella prossima lezione. Intanto, prova a ragionarci un po' su: forse c'entra qualcosa il C.E. della funzione?

7. Innanzitutto rispondiamo alla prima domanda, che ci servirà per risolvere l'esercizio. La risposta è un bel no: è vero che teoricamente dovremmo separare il modulo a seconda che $x_0 - 1 + h \geq 0$ o $x_0 - 1 + h < 0$, ma per valori di h prossimi a 0 questo avrà lo stesso segno di $x_0 - 1$ e perciò si semplificherà in ogni caso. Con questa osservazione, lascio a te concludere che $f'(0) = -1$. Tutt'altro discorso vale per $x_0 = 1$: ci ritroveremo alla fine con il limite

$$
\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}
$$

che, come sappiamo, non esiste. Anche questo, come nell'esercizio precedente, è un punto in cui la funzione non è derivabile; rimandiamo perciò anche questo alla prossima lezione.

Soluzione dell'esercizio 2.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

1. Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^3$:

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left(3x^2 + 3xh * h^2\right)}{\cancel{h}} = 3x^2. \end{aligned}$$

   Analogamente, la derivata prima di $g(x)$ è la funzione $g'(x) = 6x$.

2. Prima di perderci in un mare di conti superflui, osserviamo che quando svilupperemo $(x+h)^n$, prima semplificheremo x^n e poi raccoglieremo h da tutti gli altri termini, semplificandolo col denominatore come abbiamo fatto nell'esercizio precedente. A questo punto, tutti i termini rimasti eccetto il primo conterranno come fattore almeno una potenza di h e quindi, quando faremo il limite, questi si annulleranno tutti. Ciò che resterà sarà precisamente nx^{n-1}, ovvero il termine che nello sviluppo del binomio di Newton avrebbe avuto un fattore di h^1. E' perciò vero che la derivata di x^n è nx^{n-1}.