ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Uscire o non uscire, problema individuale o collettivo? Soluzione e commento

Punto 1. Quando ciascun individuo sceglie egoisticamente quante ore trascorrere fuori casa, ignorando la possibilità di causare un danno alla collettività, massimizza la sua funzione di utilità. Così facendo, otterremo la funzione di risposta ottima[1] di ciascun soggetto in funzione delle ore trascorse fuori casa dall'altro. Nello specifico, avremo:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{c - x_B}{2} \\ x_B &= \frac{c - x_A}{2} \end{aligned}$$

risolvo e ottengo $x_A^* = \frac{c}{3}$ e $x_B^* = \frac{c}{3}$.
Il benessere collettivo[2], ottenuto dalla somma dei livelli di utilità dei due soggetti al netto del danno risulta:

$$SS = \frac{2}{3}c\left(\frac{c}{3} - d\right)$$

Di seguito sono riportati i calcoli e le fasi dello svolgimento.

$$\begin{aligned} &1)\ \text{MAX } U_A(x_A); \quad U_A(x_A) = -x_A^2 - x_A x_B + c x_A \\ &\quad \text{F.O.C.} \quad U_A^{'}(x_A) = 0 \implies -2x_A - x_B + c = 0 \implies x_A^* = \frac{c - x_B}{2} \\ &\quad \text{S.O.C.} \quad U_A^{''} < 0 \quad U_A^{''} = -2 < 0\ \forall x_A \implies x_A^* \text{ MAX} \\ &2)\ \text{MAX } U_B(x_B)\ \ldots\ \textit{stesso procedimento} \implies x_B^* = \frac{c - x_A}{2} \end{aligned}$$

Risolvo il sistema $\begin{cases} x_A = \frac{c - x_B}{2} \\ x_B = \frac{c - x_A}{2} \end{cases} \implies x_A^* = \frac{c}{3}$ e $x_B^* = \frac{c}{3}$.

Surplus Sociale $= U_A(x_A^*) + U_B(x_B^*) - d\,(x_A^* + x_B^*) = \frac{2}{3}c\left(\frac{1}{3}c - d\right)$.

Punto 2. Quando ciascun individuo sceglie egoisticamente quante ore trascorrere fuori casa, consapevole di causare un danno alla collettività, massimizza la sua funzione di beneficio individuale $B_{A,B}$. In questo modo, otterremo ancora una volta la funzione di risposta ottima di ciascun soggetto, in funzione delle ore trascorse fuori casa dall'altro. Nello specifico, avremo:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{c - d - x_B}{2} \\ x_B &= \frac{c - d - x_A}{2} \end{aligned}$$

Risolvo e ottengo $x_A^* = \frac{c-d}{3}$ e $x_B = \frac{c-d}{3}$. Il benessere collettivo, ottenuto dalla somma dei livelli di utilità dei due soggetti al netto del danno risulta

$$\text{SS} = \frac{2}{9}(c - d)^2 .$$

[1] La funzione di risposta ottima è un concetto tipico della teoria dei giochi: esprime la decisione ottima di un agente economico in funzione della scelta di tutti gli altri agenti economici coinvolti nell'interazione.

[2] Anche denominato surplus sociale (SS).

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Di seguito sono riportati i calcoli e le fasi dello svolgimento.

Sia $B_A = U_A(x_A) - D,\ B_B = U_B(x_B) - D$

1) MAX $B_A(x_A)$; $\quad B_A(x_A) = -x_A^2 - x_A x_B + c x_A - d\,(x_A + x_B)$

F. O. C. $\quad B_A'(x_A) = 0 \implies -2x_A - x_B + c - d = 0 \implies x_A^* = \dfrac{c - d - x_B}{2}$

S. O. C. $\quad B_A'' < 0 \implies -2 < 0\ \forall x_A \implies x_A^*$ MAX

2) MAX $B_B(x_B)$ ... *stesso procedimento* $\implies x_B^* = \dfrac{c - d - x_A}{2}$

Risolvo il sistema $\begin{cases} x_A = \frac{c-d-x_B}{2} \\ x_B = \frac{c-d-x_A}{2} \end{cases} \implies x_A^* = \frac{c-d}{3}$ e $x_B^* = \frac{c-d}{3}$.

Surplus Sociale $= U_A(x_A^*) + U_B(x_B^*) - d\,(x_A^* + x_B^*) = \frac{2}{9}\,(c-d)^2$.

Punto 3. Quando i due individui scelgono di cooperare, consapevoli di causare un danno alla collettività, la funzione che viene massimizzata è quella di beneficio/benessere sociale. Ipotizzando che i soggetti, in quanto aventi preferenze descritte da funzioni di utilità della medesima natura, vogliano trascorrere ognuno lo stesso numero di ore fuori casa, avremo:

$$x_A^* = \frac{c-d}{4}$$
$$x_B^* = \frac{c-d}{4}$$

Il benessere collettivo, ottenuto dalla somma dei livelli di utilità dei due soggetti al netto del danno risulta

$$\mathrm{SS} = \frac{1}{4}\,(c-d)^2$$

Di seguito sono riportati i calcoli e le fasi dello svolgimento.

Chiamo il beneficio sociale $B = U_A(x_A) + U_B(x_B) - D$.

MAX B; $\quad B_A(x_A) = -x_A^2 - x_A x_B + c x_A - x_B^2 - x_A x_B + c x_B - d\,(x_A + x_B)$

F. O. C. $\quad \nabla B_{SOL} = 0 \implies \begin{cases} B_{x_A}' = 0 \\ B_{x_B}' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -2x_A - 2x_B + c - d = 0 \\ -2x_B - 2x_A + c - d = 0 \end{cases}$

Il sistema è verificato $\forall x_A, x_B$ tali che $x_A + x_B = \frac{c-d}{2}$. Ipotizzo che A e B si accordino per $x_A = x_B \implies x_A^* = \frac{c-d}{4}$ e $x_B^* = \frac{c-d}{4}$.
Surplus Sociale $= U_A(x_A^*) + U_B(x_B^*) - D = \frac{1}{4}\,(c-d)^2$.

Commento. Analizzando i risultati ottenuti nei tre casi sopra elencati, si evince che il numero di ore scelto dai due individui è maggiore al punto 1, e registra il valore minimo al punto 3. D'altro canto, il benessere sociale è maggiore al terzo punto, e più basso nel primo. Il risultato ci dimostra che, in situazioni di natura simile a quella descritta dall'esercizio, le scelte attuate egoisticamente, per quanto ottimali per i singoli individui (al punto 1 ho il livello massimo di ore),

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

non saranno mai efficienti dal punto di vista sociale. Nel punto 3, infatti, i soggetti scelgono un numero di ore inferiore rispetto ai due punti precedenti. Così facendo, "rinunciano" a una parte della propria felicità individuale per ottenere il livello di benessere sociale massimo. L'allocazione così raggiunta è, a tutti gli effetti, un ottimo paretiano [3].
Il punto 2 rappresenta una via di mezzo. I due individui sono consapevoli di far parte di una collettività, infatti la loro scelta avviene nel rispetto di quest'ultima. Parallelamente, la loro decisione è dettata dalle esigenze individuali, e non è guidata dai principi di collaborazione e cooperazione.

[3]Un ottimo Paretiano/Allocazione Pareto efficiente si realizza quando l'allocazione delle risorse è tale che non è possibile apportare miglioramenti paretiani al sistema. Più semplicemente, non è possibile migliorare la condizione di un soggetto senza peggiorare quella di un altro.