ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Che cos'è una funzione? — Una lezione con Luigi

Cominciamo dalla definizione.

Definizione

Dati due insiemi A e B (non vuoti), una **funzione** f è una relazione che associa a *ogni* elemento di A *uno e uno solo* elemento di B. Una funzione viene indicata con la notazione $f : A \to B$.

Ci sono diversi punti da mettere a fuoco in questo paio di righe; prima però, proviamo a partire da quello che già conosciamo. Nel linguaggio comune, ti sarà di certo capitato di sentire/usare l'espressione "in funzione di", come riferimento a una certa quantità o cosa che si modifica rispetto a un'altra. Provando a tenere a mente questo esempio, andiamo avanti con le definizioni.

Definizione

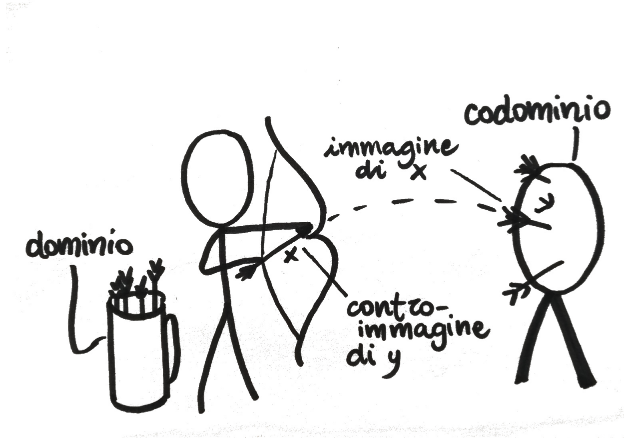
Se la funzione f associa a un elemento $x \in A$ l'elemento $y \in B$, diciamo che y è **immagine** di x; a sua volta, x è **controimmagine** di y. Scriviamo: $y = f(x)$.

Un'altra idea che possiamo tenere a mente per capire il concetto di funzione è una macchina di input/output: una funzione è quella cosa che prende "in pasto" degli elementi di A e ne restituisce altri; le loro immagini, appunto.

Definizione

L'insieme A viene detto **dominio** della funzione f, mentre B viene detto **codominio** della funzione.

Un ultimo paragone per far ulteriore chiarezza: il concetto di funzione è paragonabile al processo del tiro con l'arco. Per tirare con l'arco è necessaria una faretra (il *dominio*) che contiene delle frecce (le *controimmagini*) che vengono scoccate dall'arciere verso il bersaglio (il *codominio*) e che colpiscono ciascuna un certo punto sulla superficie (l'*immagine*).



Il paragone ci aiuta anche a riflettere sui due aspetti della definizione di funzione che avevamo lasciato in sospeso. Il fatto che a *ogni* elemento di A venga associato un elemento di B vuol dire che ogni freccia della faretra viene scoccata dall'arciere; il fatto che a un elemento di A venga associato *uno e uno solo* elemento di B vuol dire semplicemente che è impossibile che la freccia si spacchi in due e colpisca due punti diversi del bersaglio. Se hai capito, prova a risolvere questo esercizio.

Esercizio

Quali di queste relazioni individuano una funzione e quali no? Se la risposta è negativa, è possibile modificare la relazione in modo che diventi una funzione? Giustifica le tue risposte.
- La relazione che associa ad ogni persona la propria età
- La relazione che associa a ciascun numero naturale una persona con di età corrispondente
- La relazione che associa ad ogni persona la propria prole
- La relazione che associa a un qualsiasi numero di 10 cifre un cellulare
- La relazione che associa ad ogni secondo la tua posizione
- La relazione che associa ad ogni brano musicale l'artista che lo ha registrato

Le funzioni non sono tutte uguali: alcune hanno delle proprietà che torneranno utili in moltissimi contesti. Ne introduciamo qui alcune e proviamo a capire a cosa possano servire.

Definizione

Diciamo che una funzione f da A a B è
- **suriettiva**, se ad ogni elemento di B è associato *almeno* un elemento di B;
- **iniettiva**, se ad ogni elemento di B è associato *al più* un elemento di A;
- **biettiva**, se è *contemporaneamente* iniettiva e suriettiva.

Ci ritroviamo, di nuovo, a fare i conti con delle definizioni un po' delicate; per mettere bene a fuoco il senso di quell' "al più" e di quell' "almeno", facciamo di nuovo ricorso al tiro con l'arco.

Cosa vuol dire che la funzione è suriettiva? Che se prendo un punto qualsiasi della superficie del bersaglio, troverò una freccia; cioè, l'intera superficie (l'insieme dei punti) del bersaglio è raggiunta dalle frecce dell'arciere.

Per comprendere cosa vuol dire che una funzione sia iniettiva, rileggi un attimo la definizione. Prendiamo di nuovo un punto sulla superficie del bersaglio: non per forza stavolta quel punto è stato raggiunto da una freccia; se però c'è una freccia, ce n'è una soltanto, non due, né tre. In pratica, se una funzione è iniettiva l'arciere non può essere Robin Hood, che è capace di incastrare una freccia sopra l'altra.

Una funzione è invece biettiva quando ogni singola freccia scoccata dall'arciere raggiunge un punto diverso del bersaglio, e non ci sono più punti liberi.

Esercizio

Considera le funzioni dell'esercizio precedente e identifica quali di esse siano iniettive, suriettive o biettive. Riesci a modificarle in modo da renderle iniettive, suriettive, biettive?

A cosa servono le funzioni?

Veniamo dunque a una questione di carattere pratico: a cosa servono le funzioni? Perché spenderci in tutte queste definizioni e in tutto questo formalismo? Certo, alcuni filosofi potrebbero osservare che una buona idea non si misura soltanto in base alla sua spendibilità, ma per gli appassionati e le appassionate dell'utilitarismo diamo qualche suggestione.

Le funzioni, tra le tante cose, ci aiutano a rappresentare la realtà: possiamo, per esempio, descrivere la temperatura in funzione di un dato punto sulla superficie terrestre o l'evoluzione di una popolazione in funzione del tempo. Chiedendo poi aiuto ai nostri colleghi scienziati (fisici, chimici, biologi...), che ci suggeriscono le leggi con cui le diverse variabili in gioco sono collegate, ci è possibile creare dei modelli per studiare tali fenomeni e fare previsioni.

Senza però stare a scomodare concetti matematici più complessi, prestando un po' di attenzione ti accorgerai che ricorri quotidianamente al concetto di funzione. Un esempio parte da un oggetto che probabilmente avrai al polso in questo momento: l'orologio. Le varie fasi della giornata sono scandite dall'orario, e guardando le lancette ti sarà certamente capitato di pensare di essere in ritardo. Se ti fermi un attimo a riflettere, però, noterai che non c'è alcun rapporto di causa-effetto tra la posizione delle lancette e l'istante in cui suona la campanella o quello in cui un treno lascia una stazione: piuttosto, a una certa posizione delle lancette abbiamo tutti deciso di associare un preciso momento del giorno, e qualcun altro a sua volta a un certo momento del giorno ha associato l'inizio di una lezione o una partenza. A tutti gli effetti, stiamo usando delle funzioni!

Esercizio

Quali funzioni riesci a individuare nella tua vita di tutti i giorni? Trovane te e formalizzale scrivendone dominio, codominio, legge che associa elemento a immagine; sono iniettive, suriettive, biettive?
BONUS: il ragionamento dell'orologio non è proprio corretto; riusciresti a fare delle modifiche affinché sia una vera e propria funzione?

Funzioni reali di variabile reale

Da questo momento in poi inizieremo a usare un po' di formule. Introduciamo una categoria di funzioni abbastanza speciale, che sarà il principale oggetto di studio dell'ultimo anno di liceo.

Definizione

Una **funzione reale di variabile reale** è una funzione f in cui sia il dominio (*variabile reale*) che il codominio (*funzione reale*) sono $\mathbb{R}$ (l'insieme dei numeri reali, appunto). Scriviamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Questo tipo di funzioni può essere descritta da una legge matematica del tipo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 1 \quad \textit{oppure} \quad f(x) = 2x + 1 \quad \textit{oppure} \quad y = 2x + 1.$$

Tutte e tre le espressioni sopra servono a esprimere il fatto che f sia una funzione che a un certo numero, che viene genericamente indicato con x, associa il suo doppio a cui viene sommato uno (per esempio, a 1 viene associato $2 \cdot 1 + 1 = 3$, a $1/2$ si associa 2 e così via).

La prima espressione indica con precisione anche gli insiemi di partenza e di arrivo, la seconda invece mette in evidenza *il valore di una funzione in un dato punto* (se la funzione associa a 1 il numero 3, scriveremo $f(1) = 3$) mentre l'ultima espressione usa due variabili.

Definizione

La x viene detta **variabile indipendente**, mentre la y viene detta **variabile dipendente**.

Ecco che torna alla mente la locuzione "in funzione di" in termini di dipendenza; adesso te ne sarà certamente più chiaro il senso.

Il grafico di una funzione - introduzione

Definizione

A una funzione f reale di variabile reale è associato un **grafico**, che è il sottoinsieme di punti (x, y) del piano cartesiano per cui y è l'immagine di x tramite f, cioè $y = f(x)$.

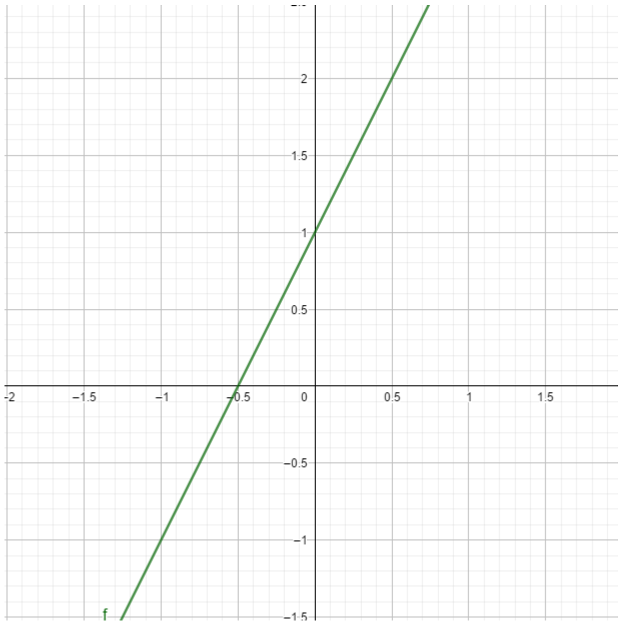


Figura 1: Grafico di $f(x) = 2x + 1$

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Esercizio

Date le seguenti leggi matematiche che individuano delle funzioni reali di variabile reale, calcolane il loro valore nei punti 0, 1 e 3 (cioè, calcola $f(0)$, $f(1)$ e $f(3)$) e rappresentali sul piano cartesiano. Riesci a disegnare un grafico approssimativo?
- $f(x) = x + 1$
- $f(x) = -2x + 3$
- $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 3$
- $f(x) = \frac{x^2-1}{x-5}$

La rappresentazione grafica di una funzione ha tanti vantaggi: alcune delle caratteristiche della funzione possono essere dedotte dal grafico, come quelle che presentate qui sotto.

Una trattazione più esaustiva del grafico di una funzione verrà fatta in seguito, quando avremo a disposizione altri strumenti per indagarne le proprietà (in particolare, *i limiti* e *le derivate*); nel frattempo, ecco alcune proprietà basilari che è possibile individuare facilmente guardando al grafico di una funzione.

Definizione

Una funzione f reale di variabile reale viene detta:
- **strettamente crescente** se per ogni coppia di punti x_1, x_2 tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) < f(x_2)$;
- **strettamente decrescente** se per ogni coppia di punti x_1, x_2 tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) > f(x_2)$;
- **non decrescente** se per ogni coppia di punti x_1, x_2 tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- **non decrescente** se per ogni coppia di punti x_1, x_2 tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Quattro definizioni tra loro molto simili; aiutiamoci con alcuni grafici per capire quanto in matematica anche un piccolo segno possa fare una grande differenza.

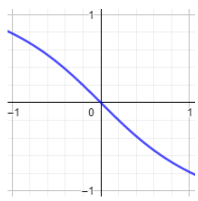


Figura 2: Una funzione strettamente decrescente

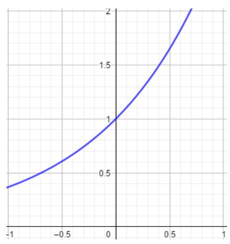


Figura 3: Una funzione strettamente crescente

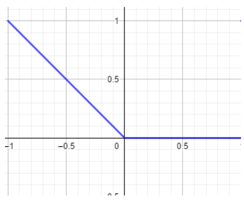


Figura 4: Una funzione non crescente

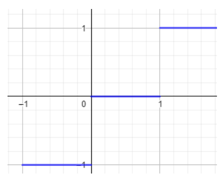


Figura 5: Una funzione non decrescente

Un'ultima carrellata di definizioni, che pure sono semplici da visualizzare tramite il grafico.

Definizione

Una funzione f reale di variabile reale si dice:
- **pari**, quando per ogni elemento x del dominio succede che $f(-x) = f(x)$;

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

- **dispari**, quando per ogni elemento x del dominio succede che $f(-x) = -f(x)$;
- **periodica** di **periodo** T se, per ogni elemento x del dominio e un qualsiasi numero k intero, vale $f(x + kT) = f(x)$.

In sostanza, una funzione è pari quando, guardando il suo grafico, è come se l'asse delle y fungesse da specchio: la porzione di grafico per le x più grandi di 0 viene riflessa e otteniamo quella corrispondente alle x minori di 0.

Una funzione è invece dispari quando il l'origine funge da centro di simmetria; la porzione di grafico per le x maggiori di 0 è, in qualche modo, opposta al resto tramite il centro.

Capire se una funzione è periodica guardando il suo grafico è ancora più semplice: dopo un certo intervallo, comincia a ripetersi sempre uguale. E' il caso, se ne hai già sentito parlare, delle *funzioni armoniche* (seno, coseno, tangente etc.). I prossimi esempi ti aiuteranno certamente a chiarirti le idee.

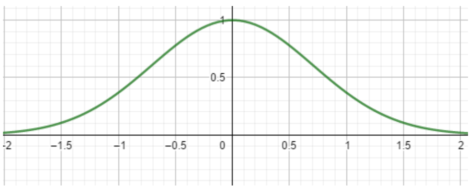


Figura 6: Una funzione pari

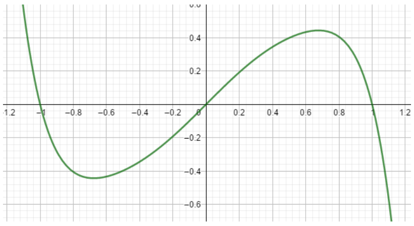


Figura 7: Una funzione dispari

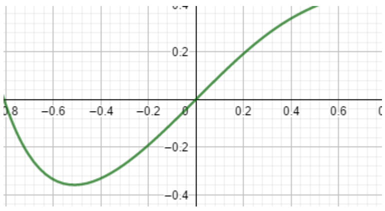


Figura 8: Una funzione né pari né dispari

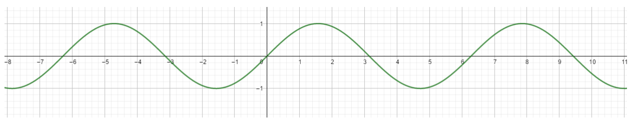


Figura 9: Una funzione periodica

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Esercizio

Dati i seguenti grafici, individua quali di esse posseggono le proprietà che abbiamo definito sopra (crescenza, parità, periodicità).