Soluzioni degli esercizi impegnativi

Soluzione dell'esercizio 3. Il passaggio chiave consiste nello scrivere il lato sinistro come $f(x) \cdot (g(x))^{-1}$. Procediamo dunque utilizzando le Proprietà 2 e 3:

$$\begin{aligned}
\Big(f(x) \cdot (g(x))^{-1}\Big)' &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot \Big((g(x))^{-1}\Big)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \Big(-(g(x))^{-2} \cdot g'(x)\Big) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.
\end{aligned}$$

Ricordando che $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ e le derivate fondamentali $(\sin(x))' = \cos(x)$ e $(\cos(x))' = -\sin(x)$, si ha che

$$\begin{aligned}
(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' &= \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la relazione $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ per ogni x.

Soluzione dell'esercizio 4. Facciamo una cosa per volta e iniziamo dalla prima richiesta, cioè scriviamo $f''(x)$ come limite del rapporto incrementale di $f'(x)$:

$$f''(x) = \lim_{k \to 0} \frac{f'(x+k) - f'(x)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \big(f'(x+k) - f'(x)\big).$$

Ora sostituiamo

$$\begin{aligned}
f'(x+k) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+k+h) - f(x+k)}{h}, \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}$$

e otteniamo

$$f''(x) = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x+k+h) - f(x+k)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right).$$

Prima di partire sparati a sostituire $f(x) = x^3$, trovandoci a dover calcolare un cubo di un trinomio, ragioniamo un attimo. Sviluppare $(x+k+h)^3$ è come sviluppare $(y+h)^3$, dove $y = x + k$. Quindi possiamo ricondurci allo sviluppo del cubo di un binomio, in cui y^3 si semplificherà con $-y^3$, e l'unico termine che sopravvivrà al limite sarà quello con una potenza alla prima di h, analogamente a quanto succedeva negli esercizi della dispensa.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Tale termine non è altri che $3y^2h$; il limite perciò vale $3(x+k)^2$. Con ragionamento analogo, il secondo limite in h vale $3x^2$, e di nuovo non occorre sviluppare il quadrato del binomio, perché l'unico termine che rimarrà sarà quello con un fattore alla prima di k, ovvero il doppio prodotto. Con questo, possiamo concludere che il limite vale effettivamente $6x$. Se non sei convinto puoi comunque provare a calcolarlo esplicitamente!

Soluzione dell'esercizio 5. I tre esercizi conclusivi sono un tentativo di riunire i concetti espressi nella dispensa. Calcoleremo innanzitutto la derivata prima delle funzioni date, utilizzando le proprietà note e le derivate delle funzioni fondamentali (suppongo tu ti sia già procurato un bel formulario a questo punto!); poi, troveremo il coefficiente angolare della tangente nel punto x_0 assegnato valutando la derivata prima in tale punto; infine, dopo aver calcolato il valore di f in x_0, troveremo la q della tangente imponendo il suo passaggio per il punto $(x_0, f(x_0))$, e sostituiremo x_1 nell'equazione della tangente così trovata per ottenere il valore approssimato di $f(x_1)$ (che sarebbe estremamente più difficile da calcolare a mano rispetto a $f(x_0)$!). Facciamo le cose passo passo.

1. La derivata prima di $f(x)$ è
$$f'(x) \;=\; \frac{1}{\cos^2\left(3^{2x^3-8x}-1\right)} \cdot 3^{2x^3-8x} \cdot \ln 3 \cdot \left(6x^2-8\right),$$
che valutata in $x_0 = 2$ vale $16\ln 3$. Si ha
$$f(2) \;=\; \ln\left(81^8\right) \;=\; \ln\left(3^{32}\right) \;=\; 32\ln 3,$$
e, imponendo $q = f(x_0) - mx_0$, si trova che $q = 0$. La retta cercata è quindi $y = 16\ln 3 \cdot x$. Sostituendovi x_1 si ottiene dunque che $f(x_1) \approx 16\ln 3 \cdot \left(2 + \frac{1}{1000}\right) = 32\ln 3 + \frac{1}{125} \cdot \ln 9$.

2. La derivata prima di $f(x)$ è
$$f'(x) \;=\; \frac{1}{\ln a \cdot \arcsin\left(\sqrt{3}x\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} \cdot \sqrt{3}$$
che valutata in $x_0 = \frac{1}{2}$ vale 2. Si ha $f(x_0) = \log_a\left(\frac{\pi}{3}\right)$, e, imponendo il passaggio per $(x_0, f(x_0))$, si trova che $q = \log_a\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1$. La retta cercata è quindi $y = 2x + \log_a\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1$. Si ottiene dunque che $f(x_1) \approx 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{1000}) + \log_a\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = \frac{1}{500} + \log_a\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

3. La derivata prima di $f(x)$ è
$$f'(x) \;=\; \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^{x^2-2x+1}+3}} \cdot e^{x^2-2x+1} \cdot (2x-2) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) - \sqrt{e^{x^2-2x+1}+3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \cdot \pi x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)}.$$
Sostituendo $x_0 = 1$, osserviamo che al numeratore nel primo addendo compare un fattore di $2x-2$ e nel secondo un fattore $\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$, che si annullano entrambi; perciò $f'(1) = m = 0$. Si calcola facilmente che $f(x_0) = 2$, quindi possiamo concludere, senza neppure bisogno di calcolare la q, che la tangente cercata è la retta $y = 2$ e rappresenta anche il valore approssimato di $f(x_1)$.